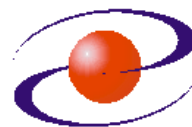




**UNIVERZITET CRNE GORE
ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET**



STUDIJSKI PROGRAM:	<i>ENERGETIKA I AUTOMATIKA</i>
PREDMET:	<i>SIGNALI I SISTEMI</i>
FOND ČASOVA:	<i>2+1+1</i>

LABORATORIJSKA VJEŽBA BROJ 1

NAZIV:	<i>PREDSTAVLJANJE SIGNALA NA RAČUNARU I RAZVOJ FUNKCIJE U FOURIER-OV RED</i>
CILJEVI VJEŽBE:	<ul style="list-style-type: none">- Predstavljanje signala u MATLAB-u,- Razumijevanje aproksimacije funkcije Fourier-ovim redom.
POTREBAN PRIBOR:	

IME I PREZIME: _____.

BROJ INDEKSA: _____.

BROJ POENA:	
OVJERAVA:	
DATUM:	

1. APARATURA

Na raspolaganju su sljedeći uređaji i oprema:

- PC

Za izvođenje laboratorijske vježbe potreban je softverski paket MATLAB. U vježbi je pretpostavljeno da su studenti osposobljeni za korišćenje pomenutog softvera.

2. TEORIJSKA OSNOVA LABORATORIJSKE VJEŽBE

Predstavljanje kontinualnih signala

Kontinualne signale karakteriše beskonačan skup mogućih vrijednosti i kao takvi se ne mogu predstaviti na računaru. Po Nyquist-ovoj teoremi, kontinualni signal ograničenog frekvencijskog opsega, sa maksimalnom frekvencijom f_m , može se u potpunosti rekonstruisati na osnovu diskretnog signala dobijenog njegovim odabiranjem sa korakom T . Korak odabiranja ne smije biti veći od recipročne vrijednosti dvostruke maksimalne frekvencije. Za predstavljanje signala u MATLAB-u neophodno je koristiti njegov diskretizovani oblik jer je nemoguće sačuvati podatak o vrijednosti signala u svakom od beskonačno vremenskih trenutaka.

Neka je $x(t)$ kontinualni signal maksimalne frekvencije f_m , gdje je $a \leq t \leq b$. Diskretnu verziju ovoga signala predstavlja niz odbiraka funkcije $x(t)$ uzetih u tačkama $a+nT$, $n=0,1,\dots$. U obradi signala T se naziva periodom odabiranja i prema Nyquist-ovoj teoremi mora biti zadovoljen uslov: $T \leq 1/2f_m$.

Ilustrujmo ovo na jednom primjeru.

Primjer 1. Prikazati signal $x(t)=10\sin(2\pi 2.1t)$ na intervalu $[-1,1]$.

```
fm=2.1;
T=1/(20*fm);
t=-1:T:1;
x=sin(2*pi*fm*t);
plot(t,x);
xlabel('vrijeme');
ylabel('amplituda');
axis([-1 1 -1.5 1.5])
```

Sinusnu i kosinusnu funkciju potrebno je odabirati sa korakom odabiranja manjim od onog određenim Nyquist-ovom teoremom. Zbog toga je u prethodnom primjeru korišten korak odabiranja $T=1/(20*fm)$, a ne $T=1/(2*fm)$.

Razvoj signala u Fourier-ov red

Razvoj proizvoljne periodične funkcije u trigonometrijski Fourier-ov red se može izvršiti na sljedeći način:

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) \quad (1)$$

Koeficijenti razvoja funkcije $x(t)$ a_0 , a_n i b_n se dobijaju na osnovu relacija:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

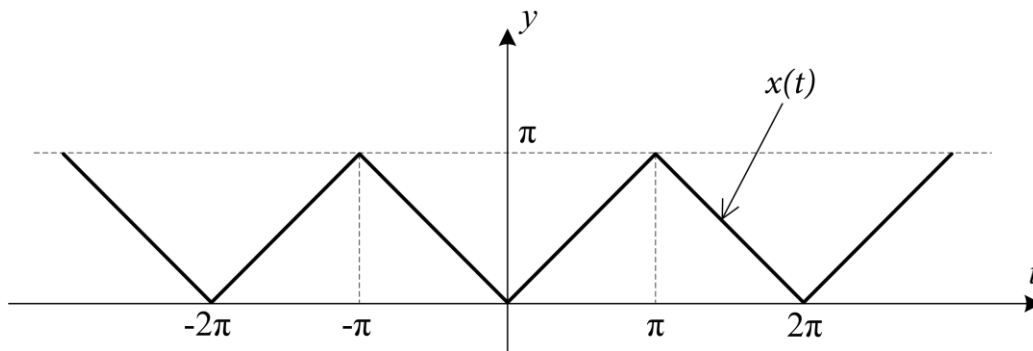
$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

gde je T trajanje osnovne periode, a ω_0 osnovna (fundamentalna) učestanost.

Kao što se da vidjeti, suma u relaciji (1) je beskonačna i kao takva se ne može prikazati na računaru. Stoga se ona ograničava. Jedan član ove sume se naziva harmonikom. Konačan broj harmonika izazvaće grešku u aproksimaciji. Što je taj broj veći, to je i aproksimacija vjerodostojnija. Tačnost aproksimacije se može sagledati preko srednje kvadratne greške:

$$e = \sum_{t=a}^b (x_d(t) - x(t))^2.$$

Primjer 2. Izvršiti razvoj funkcije $x(t)$ prikazane na Slici 1. u tigonometrijski Fourier-ov red.



Slika 1 - Signal iz Primjera 2.

Sa slike se da zaključiti da je funkcija $x(t)$ periodična sa trajanjem osnovnog perioda $T=2\pi$, odakle slijedi $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi / T = 1$. Funkcija $x(t)$ se u osnovnom periodu može zapisati na sljedeći način:

$$x(t) = \begin{cases} |t|, & -\pi \leq t \leq \pi \\ 0, & \text{za ostalo} \end{cases},$$

na osnovu čega slijedi:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t dt = \frac{1}{\pi} \left. \frac{t^2}{2} \right|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2},$$

$$a_n = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| \cos(nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos(nt) dt = \frac{2}{\pi} \left[\left. \frac{t \sin(nt)}{n} \right|_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin(nt) dt \right] = \frac{2}{\pi n^2} (\cos(n\pi) - 1)$$

$$= \begin{cases} -\frac{4}{\pi n^2}, & n = 1, 3, 5, \dots \\ 0, & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |t| \sin(nt) dt = [|t| \text{ je parna funkcija}] = 0$$

Uvrštavanjem gornjih relacija u izraz (1) dobijamo:

$$x(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[\cos(t) + \frac{1}{3^2} \cos(3t) + \frac{1}{5^2} \cos(5t) + \dots \right] = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos((2n-1)t).$$

3. ZADACI LABORATORIJSKE VJEŽBE

Zadatak 1. Definisati i grafički prikazati signale:

$$x(t) = e^{-t} \sin(4t)$$

$$y(t) = \sin(2t)/2 + \cos(8t)/8$$

na intervalu $0 \leq t < 2\pi$ sa korakom odabiranja $T=\pi/32$. U jednom grafičkom prozoru prikazati obje funkcije naredbom *plot*, a drugi grafički prozor izdijeliti na dva potprozora i u jednom potprozoru prikazati funkciju $x(t)$ naredbom *stem*, a u drugom prikazati funkciju $y(t)$ naredbom *stem*. Postaviti odgovarajuće oznake na graficima.

Zadatak 2. Periodična funkcija $x(t)$, koja se u osnovnom periodu može zapisati kao:

$$x(t) = |t|, \quad -\pi \leq t \leq \pi$$

ima razvoj u trigonometrijski Fourier-ov red oblika:

$$x(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[\cos(t) + \frac{1}{3^2} \cos(3t) + \frac{1}{5^2} \cos(5t) + \dots \right] = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos((2n-1)t)$$

Napisati MATLAB program koji formira funkciju $x(t)$ na intervalu $[-3\pi, 3\pi]$, sa $T=1/200$, i koji od korisnika traži unos broja N, koji predstavlja broj harmonika razvoja te funkcije u trigonometrijski Fourier-ov red. Nakon toga, program treba da u istom grafičkom prozoru prikaže način na koji suma jednosmerne komponente i harmonika konvergira originalnoj funkciji, pri čemu broj harmonika raste od 1 do N.

Pored pomenutih grafika, u grafičkom prozoru treba da stoji i vrijednost kvadratne greške aproksimacije prilikom dodavanja svakog od harmonika.

Zadatak 3. Periodična funkcija $x(t)$, koja se u osnovnom periodu može zapisati kao:

$$x(t) = \begin{cases} -1, & \text{za } -\pi \leq t < 0 \\ 1, & \text{za } 0 \leq t < \pi \end{cases}$$

ima razvoj u trigonometrijski Fourier-ov red oblika:

$$x(t) = \frac{4}{\pi} \left[\sin(t) + \frac{1}{3} \sin(3t) + \frac{1}{5} \sin(5t) + \dots \right] = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} \sin((2n-1)t)$$

Napisati MATLAB program koji formira funkciju $x(t)$ na intervalu $[-3\pi, 3\pi]$, sa $T=1/100$, i koji od korisnika traži unos greške E, koja predstavlja tačnost razvoja te funkcije u trigonometrijski Fourier-ov red za konačan broj uzetih harmonika. Nakon toga, program treba da u istom grafičkom prozoru prikaže način na koji suma jednosmerne komponente i harmonika konvergira originalnoj funkciji, pri čemu broj harmonika raste sve dok je vrijednost kvadratne greške aproksimacija veća od E ili broj harmonika manji od 50.

4. ZAKLJUČAK